数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔１〕　$a = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ とする。a の分母を有理化すると

$$a = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{10-2\sqrt{21}}{4}$$

$$= \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

ア, イウ, エ

２次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \boxed{\text{キ}}$$

である。

$$6x^2 - 7x + 1 = 0$$
$$(6x-1)(x-1) = 0$$
$$x = \frac{1}{6},\ 1$$

オ, カ, キ

次の⓪～③の数のうち最も小さいものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪　$\dfrac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$　　　①　$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}$

②　$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　　　③　$\boxed{\text{キ}}$

（数学Ⅰ・数学A第１問は次ページに続く。）

$\dfrac{2}{5-\sqrt{21}} > 1$,　$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} > \dfrac{1}{6}$　よって ② ク

∵ ① $= \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

∵ 左辺 − 右辺 $= \dfrac{1}{6}(15-3\sqrt{21}-1) = \dfrac{1}{6}(14-3\sqrt{21}) = \dfrac{1}{6}(\sqrt{196}-\sqrt{189}) > 0$

〔2〕 次の $\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。また，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の④～⑦のうちから一つ選べ。

自然数 n に関する条件 p，q，r，s を次のように定める。

p：n は 5 で割ると 1 余る数である $\leftrightarrow$ $n = 5m_1 + 1$ $(m_1 = 0, 1, 2, \cdots)$

q：n は 10 で割ると 1 余る数である $\leftrightarrow$ $n = 10m_2 + 1$ $(m_2 = 0, 1, 2, \cdots)$

r：n は奇数である $\leftrightarrow$ $n = 2m_3 + 1$ $(m_3 = 0, 1, 2, \cdots)$ とおける.

s：n は 2 より大きい素数である $\leftrightarrow$ $3, 5, 7, 11, \cdots$

また，条件 r の否定を $\overline{r}$，条件 s の否定を $\overline{s}$ で表す。このとき

「p かつ r」は q であるための $\boxed{\text{ケ}}$。 「pかつr」$\rightleftarrows$ m_1が偶数 $\rightleftarrows$ $n=5(2m_4)+1$ $(m_4=0,1,\cdots)$
$\rightleftarrows$ $n=10m_4+1$ $\rightleftarrows$ q $\therefore \underline{⓪}_{ケ}$

$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための $\boxed{\text{コ}}$。対偶を考える. $s \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} r$ 反例：9 よって $\overline{r} \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} \overline{s}$ $\therefore \underline{②}_{コ}$〃

「p かつ s」は「q かつ s」であるための $\boxed{\text{サ}}$。 「pかつs」$\rightleftarrows$「pかつrかつs」∵ sが奇数
$\rightleftarrows$「qかつs」∵ ケより
よって $\underline{⓪}_{サ}$〃

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

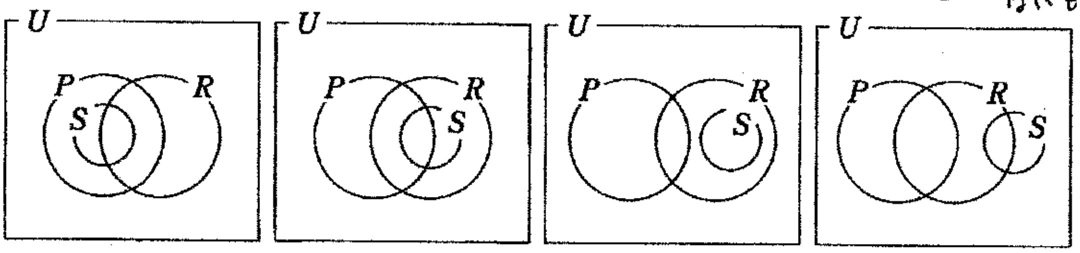
② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

自然数全体の集合を全体集合 U とし，条件 p を満たす自然数全体の集合を P，条件 r を満たす自然数全体の集合を R，条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると，P，R，S の関係を表す図は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\underline{⑤}_{シ}$〃 ∵ Sは奇数の部分集合である。また、すべての素数はPに属する訳ではない。例えば 7 のようにPに属さないものもある。

④ ⑤ ⑥ ⑦



数学Ⅰ・数学A

第2問 (配点 25)

a，b を実数とし，x の二つの2次関数

$$y = 3x^2 - 2x - 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = x^2 + 2ax + b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。

以下では，G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。

このとき

$$b = \boxed{\text{ア}}\,a^2 + \boxed{\text{イ}}\,a - \boxed{\text{ウ}}$$

であり，G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(-a,\ \boxed{\text{エ}}\,a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

となる。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

G_2: $y=(x+a)^2+b-a^2 \longrightarrow$ 頂点 $(-a,\ b-a^2)$ —③

③が G_1 上にあるので

$b-a^2=3a^2+2a-1$

$\underline{b=4a^2+2a-1}$ //

ア，イ，ウ

③へ代入

$\underline{(-a,\ 3a^2+2a-1)}$ //

エ，オ

(1) G_2 の頂点の y 座標は，$a=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

$a=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，G_2 の軸は直線 $x=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{\boxed{\text{セ}}\pm\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

(2) G_2 が点 $(0,5)$ を通るとき，$a=\boxed{\text{ツ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

$a=\boxed{\text{ツ}}$ のとき，G_2 を x 軸方向に $\boxed{\text{ニ}}$，y 軸方向にも同じく $\boxed{\text{ニ}}$ だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ は0でない数とする。

G_2の頂点のy座標 $3a^2+2a-1$

$=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$

$a=-\frac{1}{3}$ のときに最小値 $-\frac{4}{3}$ //

カ,キ,ク　ケ,コ,サ

このとき G_2の頂点は

$\left(\frac{1}{3}, 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}-1\right)=\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ //

シ,ス

②で $y=0$ として

$x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$

$=-a\pm\sqrt{-3a^2-2a+1}$

$=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

$=\frac{1\pm2\sqrt{3}}{3}$ //

セ,ソ,タ,チ

(2) G_2に$(0,5)$を代入

$5=b=4a^2+2a-1$

$\therefore 4a^2+2a-6=0$

$\therefore 2a^2+a-3=0$

$\therefore (2a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}, 1$ //

ツテトナ

$a=1$のとき

$G_2: y=(x+1)^2+4$ 頂点$(-1,4)$

これをαだけx軸方向 y軸方向に移動すると

頂点$(-1+\alpha, 4+\alpha)$

これがC_1上にあるので

$4+\alpha=3(-1+\alpha)^2-2(-1+\alpha)-1$

$3\alpha^2-9\alpha=0$

$\alpha\neq0$より

$\alpha=3$ //

ニ

数学Ⅰ・数学A

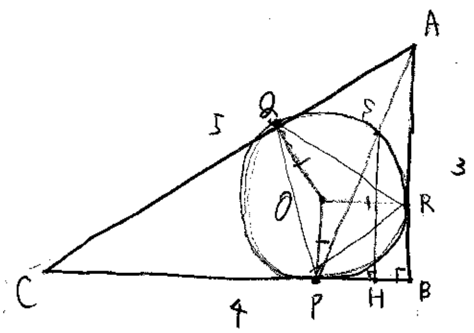
第3問 （配点　30）

△ABCをAB＝3，BC＝4，CA＝5である直角三角形とする。

(1) △ABCの内接円の中心をOとし，円Oが3辺BC，CA，ABと接する点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき，OP＝OR＝$\boxed{ア}$である。また，

$QR = \dfrac{\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$であり，$\sin\angle QPR = \dfrac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$である。

（数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。）



OP＝OR＝r とおくと.

CP＝4－r＝QC

AR＝3－r＝AQ

よって 4－r＋3－r＝5

2r＝2

$\underline{r=1}$ //
ア

△ARQで 余弦定理より

$QR^2 = AQ^2 + AR^2 - 2\cdot AQ\cdot AR\cdot \underbrace{\cos\angle A}_{\frac{3}{5}}$

$QR^2 = 4+4-2\cdot2\cdot2\,\frac{3}{5}$

$= \frac{16}{5}$

$QR = \underline{\frac{4\sqrt{5}}{5}}$ //
イ,ウ,エ

△QPRで 正弦定理より

$\frac{QR}{\sin\angle QPR} = 2\cdot R$

$\sin\angle QPR = \frac{1}{2}\,\frac{4\sqrt{5}}{5} = \underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ //
オ,カ,キ

(2) 円Oと線分APとの交点のうちPと異なる方をSとする。このとき,

AP $=\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$ であり，SP $=\dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。また，点S

から辺BCへ垂線を下ろし，垂線とBCとの交点をHとする。このとき

HP $=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$,　SH $=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$

である。したがって，$\tan\angle$BCS $=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(3) 円O上に点Tを線分RTが円Oの直径となるようにとる。このとき,

$\tan\angle$BCT $=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。よって，$\angle$RSC $=\boxed{\text{ニヌ}}^\circ$ であり,

$\angle$PSC $=\boxed{\text{ネノ}}^\circ$ である。

△APBで三平方より

$AP=\sqrt{AB^2+BP^2}=\sqrt{9+1}=\underline{\sqrt{10}}$ //　クケ

方べきの定理より

$AR^2=AS\cdot AP$

$4=AS\cdot\sqrt{10}$

$AS=\dfrac{4\sqrt{10}}{10}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

従って

$SP=AP-AS=\sqrt{10}-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

$=\underline{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}$ //　コサシス

△PHS ∽ △PBA より

$PH:\underbrace{PB}_{1}=\underbrace{PS}_{AP-AS}:\underbrace{AP}_{\sqrt{10}}$

$\therefore\ \dfrac{3\sqrt{10}}{5}=\sqrt{10}\cdot PH$

$\therefore\ HP=\underline{\dfrac{3}{5}}$ //　セ,ソ

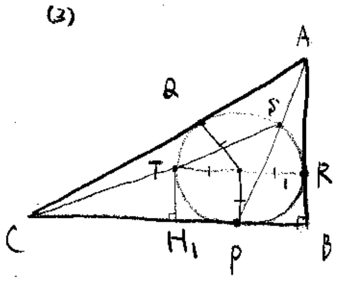
PH:HB=3:2 より

$SH=3\times\dfrac{3}{5}=\underline{\dfrac{9}{5}}$ //　タチ

よって

$\tan\angle BCS=\dfrac{SH}{CH}=\dfrac{\frac{9}{5}}{3+\frac{3}{5}}=\underline{\dfrac{1}{2}}$ //　ツテ

(3)



$\tan\angle BCT=\dfrac{1}{CH_1}$

$=\underline{\dfrac{1}{2}}$ //　トナ

(2)の $\tan\angle BCS=\dfrac{1}{2}$

を考えるとC,T,Sは一直線上.

TRはOの直径なので

$\angle RSC=\underline{90^\circ}$ //　ニヌ

また $\angle TOP=90^\circ$ より

$\angle PSC=\underline{45^\circ}$ //　ネ,ノ

数学Ⅰ・数学A

第4問 (配点　25)

袋の中に赤玉5個，白玉5個，黒玉1個の合計11個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ1から5までの数字が一つずつ書かれており，黒玉には何も書かれていない。なお，同じ色の玉には同じ数字は書かれていない。この袋から同時に5個の玉を取り出す。

5個の玉の取り出し方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。

取り出した5個の中に同じ数字の赤玉と白玉の組が2組あれば得点は2点，1組だけあれば得点は1点，1組もなければ得点は0点とする。

(数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。)

赤①②③④⑤
白[1][2][3][4][5]
黒△
とする

$$_{11}C_5 = \frac{11\times\cancel{10}\times\cancel{9}\times\cancel{8}\times7}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1} = \underset{\text{アイウ}}{\underline{462}}$$

(1) △, 1 2 3 5
― の数の内訳け: $_5C_4=5$
それぞれが赤か白なので
∴ $5\times2^4=\underset{\text{エオ}}{\underline{80}}$

1, 2, 3, 4, 5
内訳けは1通り
それぞれが赤or白なので
∴ $2^5=\underset{\text{カキ}}{\underline{32}}$

△ 1 1 2 3
白，赤一致する数 5通り
残りの2つの数 $_4C_2=6$通り
残りの2つの色は $2^2=4$通り
∴ $5\times6\times4=\underset{\text{クケコ}}{\underline{120}}$

1 1 2 3 4
白赤一致する数 5通り
残りの3つの数 $_4C_3=4$通り
残りの3つの色は $2^3=8$通り
∴ $8\times5\times4=\underset{\text{サシス}}{\underline{160}}$

(1) 得点が0点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは $\boxed{\text{エオ}}$ 通りであり，黒玉が含まれていないのは $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである。

得点が1点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは $\boxed{\text{クケコ}}$ 通りであり，黒玉が含まれていないのは $\boxed{\text{サシス}}$ 通りである。

(2) 得点が1点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ であり，2点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

(2) 得点が1点の確率 $\dfrac{280}{462} = \dfrac{20}{33}$ //
セソタチ

余事象を考える。(2点となる確率) $= 1 -$ (1点となる確率) $-$ (0点となる確率)

$$= 1 - \frac{20}{33} - \frac{112}{462} = \frac{33-20-8}{33} = \frac{5}{33} \text{ //}$$

$$\text{期待値} = 1 \times \frac{20}{33} + 2\frac{5}{33} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11} \text{ //}$$

ナ，ニ，ヌ，ネ

数学Ⅱ・数学B

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 連立方程式

$$(*)\begin{cases} xy = 128 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす正の実数 x，y を求めよう。ただし，$x \neq 1$，$y \neq 1$ とする。①の両辺で2を底とする対数をとると

$$\log_2 x + \log_2 y = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ。これと②より

$$(\log_2 x)(\log_2 y) = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

$$① \rightleftarrows \log_2 x + \log_2 y = \log_2 \underset{2^7}{\underset{\shortparallel}{128}} = \underset{\text{ア}}{7}$$

$$② \rightleftarrows \frac{\log_2 x + \log_2 y}{(\log_2 x)(\log_2 y)} = \frac{7}{12} \xleftrightarrow{①より} (\log_2 x)(\log_2 y) = \underset{\text{イ,ウ}}{12}$$

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は2次方程式

$$t^2 - \boxed{\text{エ}}\,t + \boxed{\text{オカ}} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の解である。③の解は $t = \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ は解答の順序を問わない。よって，連立方程式(＊)の解は $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$ または $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

$\underline{t^2 - 7t + 12 = 0}$ // エ，オカ

$(t-3)(t-4)=0$

$\underline{t = 3,\ 4}$ //
キ，ク

$\log_2 x = 3,\ \log_2 y = 4$

$(\text{or } \log_2 x = 4,\ \log_2 y = 3)$

$x = 2^3 = 8 \quad y = 2^4 = 16$

$\therefore (x, y) = \underline{(8, 16)}$ $(\text{or } (16, 8))$
ケ，コサ

〔2〕 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\sin 4\theta=\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に，すべての x について

$$\cos x=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-x\right)$$

である。 $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ π　　　① $\frac{\pi}{2}$　　　② $-\frac{\pi}{2}$

したがって，①が成り立つとき，$\sin 4\theta=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$となり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{\text{シ}}-\theta$ のとり得る値の範囲を考えれば，$4\theta=\boxed{\text{シ}}-\theta$ または $4\theta=\pi-\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$となる。よって，①を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ または $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

$\cos x=\sin(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{\text{シ}}-x)$

$x=\theta$ として

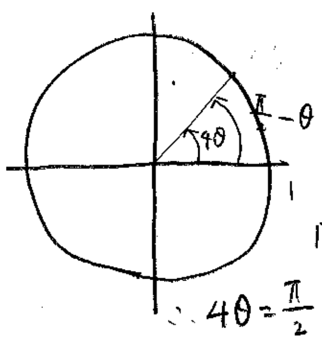
$\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

この式と①より

$\sin 4\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

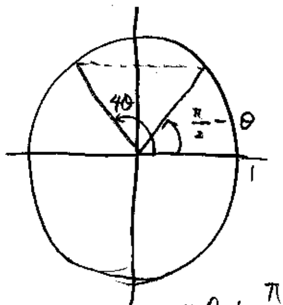
$0<4\theta<2\pi$

$0<\frac{\pi}{2}-\theta<\frac{\pi}{2}$



図より

$\therefore 4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$ —②



$4\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\pi$

$\therefore 4\theta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ —③

②より $\theta=\dfrac{\pi}{\underset{\text{セソ}}{10}}$

③より $3\theta=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta=\dfrac{\pi}{\underset{\text{ス}}{6}}$

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ の値を求めよう。① より

$$\boxed{\text{ツ}}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos\theta$$

となり，この式の左辺を 2 倍角の公式を用いて変形すれば

$$\left(\boxed{\text{テ}}\sin\theta - \boxed{\text{ト}}\sin^3\theta\right)\cos\theta = \cos\theta$$

となる。ここで $\cos\theta > 0$ であるから

$$\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta - \boxed{\text{テ}}\sin\theta + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ は ② を満たしている。$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ とする

と，$\sin\theta \neq \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であるから

$$\boxed{\text{ナ}}\sin^2\theta + \boxed{\text{ニ}}\sin\theta - 1 = 0$$

となる。ここで，$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}} = \frac{\boxed{\text{ヌネ}} + \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ //
タ，チ

①より

$\underbrace{2}_{\text{ツ}}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos\theta$ //

$\Leftrightarrow 4\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta) = \cos\theta$

$\Leftrightarrow \underbrace{(4\sin\theta - 8\sin^3\theta)}_{\text{テ，ト}}\cos\theta = \cos\theta$ //

$\cos\theta > 0$ より

$\Leftrightarrow 4\sin\theta - 8\sin^3\theta = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin^3\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$ — ②

$\Leftrightarrow \left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)(8\sin^2\theta + 4\sin\theta - 2) = 0$

$\sin\theta \neq \frac{1}{2}$ より

$8\sin^2\theta + 4\sin\theta - 2 = 0$

$\underbrace{4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0}_{\text{ナ，ニ}}$ // この解の中に $\sin\frac{\pi}{10}$ がある。

$\sin\frac{\pi}{10} = \dfrac{-1 + \sqrt{1-4(-1)}}{4}$ $\left(\sin\frac{\pi}{10} > 0\right)$

$= \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ //

ヌ，ネ，ノ，ハ

第2問 (必答問題) (配点 30)

kを実数とし，座標平面上に点P(1, 0)をとる。曲線

$$y = -x^3 + 9x^2 + kx$$

をCとする。

(1) 点Q$(t,\ -t^3 + 9t^2 + kt)$における曲線Cの接線が点Pを通るとすると

$$-\boxed{ア}t^3 + \boxed{イウ}t^2 - \boxed{エオ}t = k$$

が成り立つ。

$$p(t) = -\boxed{ア}t^3 + \boxed{イウ}t^2 - \boxed{エオ}t$$

とおくと，関数$p(t)$は$t = \boxed{カ}$で極小値$\boxed{キク}$をとり，$t = \boxed{ケ}$で極大値$\boxed{コ}$をとる。

したがって，点Pを通る曲線Cの接線の本数がちょうど2本となるのは，kの値が$\boxed{サ}$または$\boxed{シス}$のときである。また，点Pを通る曲線Cの接線の本数は$k = 5$のとき$\boxed{セ}$本，$k = -2$のとき$\boxed{ソ}$本，$k = -12$のとき$\boxed{タ}$本となる。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

$y' = -3x^2 + 18x + k$

点Q$(t, -t^3+9t^2+kt)$における接線lは

l: $y = (-3t^2+18t+k)(x-t) - t^3 + 9t^2 + kt$

これがP(1, 0)を通るとき

$0 = (-3t^2+18t+k)(1-t) - t^3 + 9t^2 + kt$

$0 = -3t^2 + 3t^3 + 18t - 18t^2 + k - kt - t^3 + 9t^2 + kt$

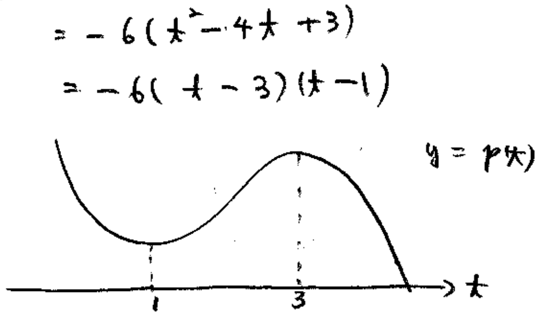
$\underline{-2t^3 + 12t^2 - 18t = k}$ ア,イウ,エオ

$p(t) = -2t^3 + 12t^2 - 18t$

$p'(t) = -6t^2 + 24t - 18$

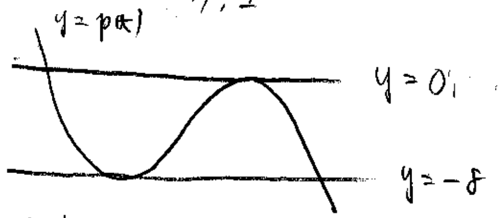
$= -6(t^2 - 4t + 3)$

$= -6(t-3)(t-1)$



$\underline{t=1: 極小値\ p(1) = -8}$ カ, キク

$\underline{t=3: 極大値\ p(3) = 0}$ ケ, コ



接線の本数と$p(t) = k$をみたす実数解の個数は一対一対応するので

$k = \underline{0\ \text{or}\ -8}$ のとき 2本 (サシス)

$k = 5$ のとき $\underline{1本}$ (セ)

$k = -2$ のとき $\underline{3本}$ (ソ)

$k = -12$ のとき $\underline{1本}$ (タ)

(2) $k=0$ とする。曲線

$$y=-x^3+6x^2+7x$$

を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は $\boxed{チ}$ と $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，2曲線 C，D および2直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた二つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$ である。

$C: y=-x^3+9x^2$ —①

$D: y=-x^3+6x^2+7x$ —②

①, ②を連立して解くと

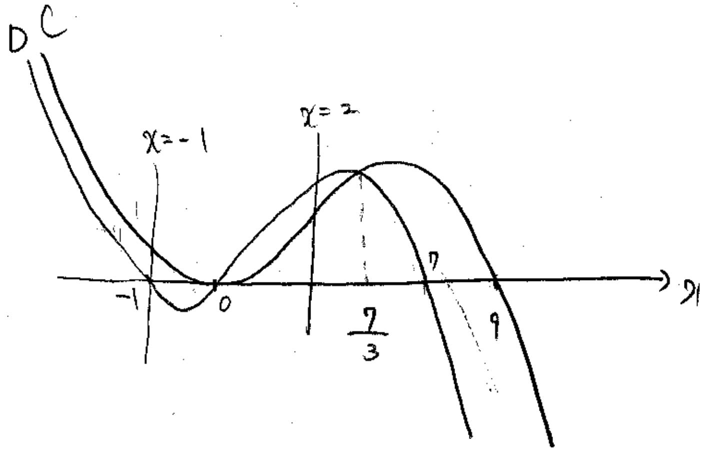
$9x^2=6x^2+7x$

$3x^2=7x$

$3x\left(x-\frac{7}{3}\right)=0$

$x=0,\ \frac{7}{3}$ //

チ, ツ, テ



$D: y=-x(x^2-6x-7)$

$\quad =-x(x-7)(x+1)$

$C: y=-x^2(x-9)$

よりC, Dの配置は上図

$S=\int_{-1}^{0}(C-D)dx+\int_{0}^{2}(D-C)dx=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+7x)dx=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)dx+\int_{2}^{0}(3x^2-7x)dx$

$\int(3x^2-7x)dx=x^3-\frac{7}{2}x^2+C=F(x)$ とすると

$=2F(0)-F(-1)-F(2)=-\left(-1-\frac{7}{2}+8-14\right)=\frac{21}{2}$ //

ト, ナ, ニ

第３問 (選択問題) (配点 20)

自然数の列 1，2，3，4，… を，次のように群に分ける。

$$1 \;\big|\; 2,3,4,5 \;\big|\; 6,7,8,9,10,11,12 \;\big|\; \cdots$$

第１群　第２群　第３群

ここで，一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n で表す。

(1) $a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=\boxed{アイ}$ である。

$$a_n-a_{n-1}=\boxed{ウ}\,n-\boxed{エ}\quad (n=2,3,4,\cdots)$$

が成り立ち

$$a_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}n^{\boxed{キ}}-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

である。

よって，600 は，第 $\boxed{コサ}$ 群の小さい方から $\boxed{シス}$ 番目の項である。

(数学Ⅱ・数学B第３問は次ページに続く。)

3·4−2=10 コある

|13 14 15 16 17 18 19 20 21 22|

$a_4=\underset{アイ}{\underline{22}}$

$a_n-a_{n-1}=(n群の項数)=\underset{ウ,エ}{\underline{3n-2}}$, $(n\geqq 2)$

$n=2,3,\cdots$ と順次両辺加えると

$a_2-a_1=3\cdot 2-2$

$a_3-a_2=3\cdot 3-2$

$+)\ a_n-a_{n-1}=3n-2$

$a_n-a_1=\frac{1}{2}(n-1)(4+3n-2)$ ($n=1$も充てる)

$a_n=\frac{1}{2}(n-1)(3n+2)+1$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n\quad (n\geqq 1)$

$a_{n-1}<600\leqq a_n$

$\frac{3}{2}(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-1)<600\leqq\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$

$3(n-1)^2-(n-1)<1200\leqq 3n^2-n$

解くと $n=21$

20群　21群

590 | 591 … 600 … |

$\underset{コサ}{\underline{21}}$ 群目の $\underset{シス}{\underline{10}}$ 番目

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対し，第$(n+1)$群の小さい方から$2n$番目の項をb_nで表すと

$$b_n=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}n^{\boxed{タ}}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}n$$

であり

$$\frac{1}{b_n}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{ナ}}\right)$$

が成り立つ。これより

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{ニ}\,n}{\boxed{ヌ}\,n+\boxed{ネ}}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

となる。

$$b_n=a_n+2n=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n=\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\frac{1}{b_n}=\frac{2}{3n(n+1)}=\underbrace{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{テ,ト,ナ}\ //$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

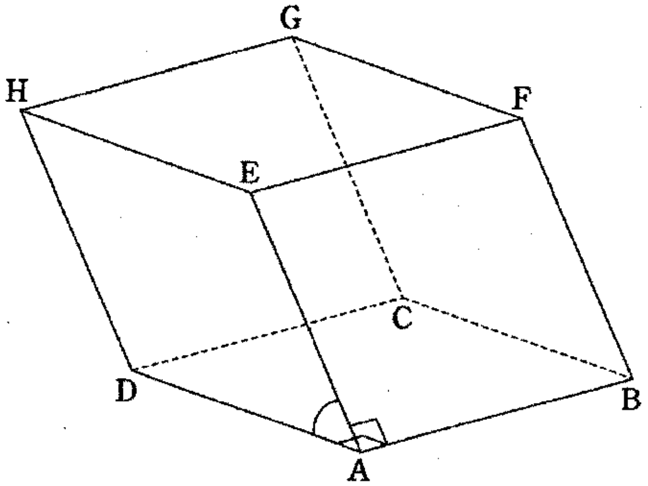
$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=\underbrace{\frac{2n}{3n+3}}_{ニ,ヌ,ネ}\ //$$

第4問 (選択問題) (配点 20)

二つずつ平行な三組の平面で囲まれた立体を平行六面体という。辺の長さがすべて1の平行六面体 ABCD−EFGH があり，$\angle \mathrm{EAB} = \angle \mathrm{DAB} = \frac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{EAD} = \frac{\pi}{3}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{r}$ とおく。

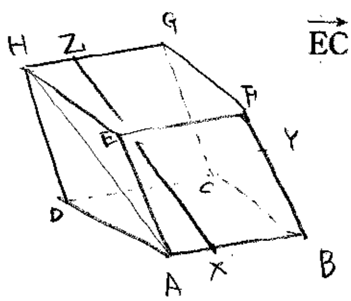


$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ とする。辺 AB を $a : (1-a)$ の比に内分する点を X，辺 BF を $b : (1-b)$ の比に内分する点を Y とする。点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする。三角形 XYZ を含む平面を α とする。

(1) $\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot \vec{r} = \boxed{\text{ア}}$，$\vec{q} \cdot \vec{r} = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ は，a，b，$\vec{p}$，$\vec{r}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{XY}} = \left(1 - \boxed{\text{エ}}\right)\vec{p} + \boxed{\text{オ}}\,\vec{r}$ と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{EC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XZ}} = \boxed{\text{カ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)



$\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{p}\cdot\vec{r} = \underline{0}$ (∵直交)，

$\vec{q}\cdot\vec{r} = 1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{イウ}$

$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AY} - \overrightarrow{AX}$

$= \vec{p} + b\vec{r} - a\vec{p}$

$= \underbrace{(1-a)\vec{p} + b\vec{r}}_{エ,オ}$

$\overrightarrow{EC}\cdot\underbrace{\overrightarrow{XZ}}_{\overrightarrow{AH}} = (\vec{p} - \vec{r} + \vec{q})\cdot(\vec{r} + \vec{q})$

$= |\vec{q}|^2 - |\vec{r}|^2$

$= \underbrace{0}_{カ}$

(2) 直線ECと平面αが垂直に交わるとし，交点をKとする。$\overrightarrow{EC}$が三角形XYZの2辺と垂直であることから，$\boxed{キ}a+b=\boxed{ク}$が成り立つ。

以下では，$b=\dfrac{1}{2}$とする。このとき$a=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$である。$\overrightarrow{EK}$を実数$c$を用いて$\overrightarrow{EK}=c\overrightarrow{EC}$と表すと，$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AE}+c\overrightarrow{EC}$である。一方，点Kは平面$\alpha$上にあるから，$\overrightarrow{AK}$は実数$s$，$t$を用いて

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AX}+s\overrightarrow{XY}+t\overrightarrow{XZ}$$

$$=\left(\frac{1}{\boxed{サ}}s+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{\boxed{シ}}s+t\right)\vec{r}$$

と表される。これらより，$c=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$である。よって，点Eと平面$\alpha$との距離$|\overrightarrow{EK}|$は$\dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$となる。

EC ⊥ αより

$\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{EC}=0$

$\rightleftarrows \{(1-a)\vec{p}+b\vec{r}\}(\vec{p}-r+\vec{q})=0$

$(1-a)-b+\frac{1}{2}b=0$

$1-a-\frac{1}{2}b=0$

$\underline{2a+b=2}$ //

キ，ク

$\underline{b=\frac{1}{2},\quad a=\frac{3}{4}}$ //

ケ，コ

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AE}+c\overrightarrow{EC}=\vec{r}+c(\vec{p}-\vec{r}+\vec{q})$

$=c\vec{p}+c\vec{q}+(1-c)\vec{r}$ ― ①

一方

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AX}+s\overrightarrow{XY}+t\overrightarrow{XZ}$

$=a\vec{p}+(1-a)s\vec{p}+bs\vec{r}+t\vec{r}+t\vec{q}$

$=\underline{(\frac{1}{4}s+\frac{3}{4})\vec{p}+t\vec{q}+(\frac{1}{2}s+t)\vec{r}}$ ― ② //

サ，シ

①，②より

$$\begin{cases}\frac{1}{4}s+\frac{3}{4}=c\\ \frac{1}{2}s+t=1-c\\ c=t\end{cases}$$

解くと $s=\frac{-1}{2}$，$t=\frac{5}{8}$，$\underline{c=\frac{5}{8}}$ //

ス，セ

$|\overrightarrow{EC}|^2=|\vec{p}-\vec{r}+\vec{q}|^2=3-2\cdot\frac{1}{2}=2$

$\therefore|\overrightarrow{EC}|=\sqrt{2}$

$\therefore|\overrightarrow{EK}|=c|\overrightarrow{EC}|=\underline{\frac{5}{8}\sqrt{2}}$ //

ソ，タ，チ